Hochschule
für Wirtschaft und Gesellschaft
Ludwigshafen

Mathematikvorkurs





Themenüberblick

Hochschule
für Wirtschaft und Gesellschaft
Ludwigshafen

Montag

- Grundrechenarten und Rechenregeln
- Vorzeichenregeln
- Zahlenmengen
- Bruchrechnen
- Binomische Formeln

Dienstag

- Potenzen
- Wurzeln
- Logarithmus
- Summenzeichen
- Produktzeichen

Mittwoch

- Folgen und Reihen
- Lineare Gleichungen
- Funktionen
- Definitions- und Bildmenge
- Lineare Funktionen

Donnerstag

- Quadratische Gleichungen
- Quadratische Ergänzungen
- Mitternachtsformel, pq-Formel
- Ableitungen

Freitag

- Quadratische Funktionen
- Umkehrfunktion
- Grenzwerte
- Betrag

Themenüberblick

Hochschule für Wirtschaft und Gesellschaft Ludwigshafen

Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
• Grundrechenarten und Rechenregeln • Vorzeichenregeln • Zahlenmengen • Bruchrechnen • Binomische Formeln	• Potenzen • Wurzeln • Logarithmus • Summenzeichen • Produktzeichen	• Folgen und Reihen • Lineare Gleichungen • Funktionen • Definitions- und Bildmenge • Lineare Funktionen	• Quadratische Gleichungen • Quadratische Ergänzungen • Mitternachtsformel, pq-Formel • Ableitungen	• Quadratische Funktionen • Umkehrfunktion • Grenzwerte • Betrag

Grundrechenarten

Addition	$Summand + Summand = \mathbf{Summe}$	$6 + 2 = 8$
Subtraktion	$Minuend - Subtrahend = \mathbf{Differenz}$	$6 - 2 = 4$
Multiplikation	$Multiplikator \cdot Multiplikator = \mathbf{Produkt}$	$6 \cdot 2 = 12$
Division	$\frac{Dividend}{Divisor} = \mathbf{Quotient}$	$\frac{6}{2} = 3$

Rechenregeln

1) **Punkt- vor Strichrechnung**

$$\mathbf{23 + 14 \div 2 = 23 + 7 = 30}$$

2) **Klammern zuerst berechnen**

$$\mathbf{5 * (4 - 2) = 5 * 2 = 10}$$

→ Bei geschachtelten Klammern von innen nach außen rechnen:

$$(4 - (2 * 3) * 5) = (4 - 6 * 5) = 4 - 30 = -26$$

3) **Ein Produkt ist genau dann null, wenn mindestens ein Faktor null ist.**

$$\boldsymbol{(x - 4)(x + 2) = 0 \rightarrow x = 4; x = -2}$$

4) **Die Division durch 0 ist in keinem Fall erlaubt!**

$\frac{0}{1}$ ist erlaubt, aber $\frac{1}{0}$ ist strengstens **verboten**.

Vorzeichenregeln

Beim Rechnen beachten:

$$5\ -3 = +5 - 3$$
$$-7 + (-4) = -7 - 4 = -11$$
$$+8 - (-5) = 8 + 5 = 13$$
$$5 + 8 - (7 - 2) = 5 + 8 - 7 + 2 = 8$$
$$4 + (+3) = 7$$

Merke

1. Jede Zahl ohne Vorzeichen ist positiv
2. Plus mal Minus ergibt Minus
3. Minus mal Minus ergibt Plus
4. Minus vor der Klammer dreht alle Vorzeichen darin um
5. Plus mal Plus ergibt Plus

Zahlenmengen

$\mathbb{N}$ Natürliche Zahlen

$\mathbb{Z}$ Ganze Zahlen

$\mathbb{Q}$ Rationale Zahlen

$\mathbb{R}$ Reelle Zahlen

$\mathbb{C}$ Komplexe Zahlen

$\mathbb{N}$ = { 0, 1, 2, 3, …} ;
$\mathbb{N}$* = positive natürliche Zahlen= { 1, 2, 3, …}

$\mathbb{Z}$ = { …, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 …}

$\mathbb{Q}$ = { $\boldsymbol{x} \mid \frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}^*$ }

$\mathbb{R}$ = dazu gehören alle Zahlen, die auf der Zahlengerade liegen, auch irrationale Zahlen wie $\pi, e, \sqrt{2}, \sqrt[5]{6}$

$\mathbb{C}$ = erweitern reelle Zahlenbereiche derart, dass die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ lösbar wird, indem die neue imaginäre Zahl $i^2 = -1$ eingeführt wird.

Faktorisieren

Hochschule für Wirtschaft und Gesellschaft Ludwigshafen

→ **Von einer Summe wird ein gemeinsamer Faktor ausgeklammert (Distributivgesetz)**

Beispiel: $\boldsymbol{x^2 + 3\mathrm{x} = 0}$

$\boldsymbol{x \, * (x+3) = 0}$

$\boldsymbol{x = 0}$ und $\boldsymbol{(x+3) = 0}$

$\boldsymbol{x = 0}$ und $\boldsymbol{x = -3}$

AB 1 - Teil A

Nr. 1 a-i

Nr. 3

Nr. 4

Mathematik-Vorkurs

Aufgabenblatt 1

Teil A

1) Bitte vereinfachen Sie die Terme und fassen Sie sie so weit wie möglich zusammen.

a. $5x + 7y - x + 13y$

b. $2(3x + 4y) - 9x$

c. $2 \cdot 3x + 4y - 9x$

d. $-20(-5u + 3v - 1{,}5w)$

e. $-3m(-2m - n)$

f. $3u + (4 - (2u - 1) + 8u) + 7$

g. $6x - (9y - (2x + 4z) - (2x + 3y - 8z))$

h. $37a - (2a - (25a + 12b) \cdot 4 + (37b - 15a))$

i. $(x - 11) - [x(5x - 7) - 2(4 - 3x)]$

j. $2(2x - 3y) - 6x + y$

k. $9x - 2(x - 3y) + 4(y + 4x)$

l. $-3a(a - n + 20) - 4a(2a + 8n - 3)$

m. $(a + b)(m - n)$

n. $\frac{1}{2}(2x - 4) - 5(2x + 8) + \frac{1}{4}(12x - 4)$

o. $(x + 2y)(3a + b + 2c)$

p. $(2a + 5b - c)(3a - b)$

q. $(4x - 3y)(y + x) + (8x + 2y)(3x + 4y)$

r. $(2x + 5y)(-y + 3x) - (y + 2x)(3y + 6x)$

Bruchrechnen I

1) **Kehrbruch:** zu jedem Bruch $\frac{a}{b}$ gibt es einen Kehrbruch $\frac{b}{a}$.

   Dabei gilt: $\frac{a}{b} * \frac{b}{a} = 1$

2) **Erweitern:** Zähler und Nenner werden mit derselben Zahl $c \neq 0$ multipliziert.

   $\frac{a}{b} = \frac{a * c}{b * c}$ Beispiel: $\frac{2}{3} = \frac{2 * 4}{3 * 4} = \frac{8}{12}$

3) **Kürzen:** Zähler und Nenner werden durch dieselbe Zahl $c \neq 0$ dividiert.

   $\frac{a \div c}{b \div c} = \frac{a}{b}$ Beispiel: $\frac{8}{12} = \frac{8 \div 4}{12 \div 4} = \frac{2}{3}$

Bruchrechnen II

Hochschule
für Wirtschaft und Gesellschaft
Ludwigshafen

4) Strichrechnungen:

- **Brüche mit gleichem Nenner**

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$$

Beispiel: $\frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6}$

- **Brüche mit unterschiedlichen Nennern**

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{d} = \frac{a * d}{c * d} \pm \frac{b * c}{d * c} = \frac{ad \pm bc}{cd}$$

Beispiel: $\frac{2}{3} + \frac{6}{7} = \frac{2 * 7 + 6 * 3}{3 * 7} = \frac{14 + 18}{21} = \frac{32}{21}$

Hauptnenner werden durch die Multiplikation der Nenner miteinander gebildet.

Bruchrechnen III

5) **Punktrechnungen:**

- **Multiplikation: „Nenner mal Nenner, Zähler mal Zähler“**

$$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{a * c}{b * d}$$

$$a * \frac{b}{c} = \frac{a * b}{c}$$

- **Division: Mit dem Kehrbruch multiplizieren**

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c} = \frac{a * d}{b * c}$$

Bruchrechnen IV

6) **Doppelbrüche:** Können mit einem Kehrbruch aufgelöst werden

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Beispiel: $\frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{9} \div \frac{4}{3} = \frac{2}{9} * \frac{3}{4} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

7) **„Differenzen und Summen kürzen nur die Dummen"**

$$\underbrace{\frac{4x - 2x^2}{2x^2} = \frac{2x(2-x)}{2x(x)}}_{\text{ausklammern}} \underbrace{= \frac{2-x}{x}}_{\text{kürzen}}$$

und **NICHT** $\cancel{\frac{4x - 1}{1}}$ **!!!**

8) **Gemischte Brüche**

Problem: Kann als Produkt missverstanden werden!

Lösung: Mit dem Nenner erweitern.

Beispiel: $3\frac{3}{4} = 3 + \frac{3}{4} = \frac{3 * 4 + 3}{4} = \frac{15}{4} \neq \frac{9}{4}$

AB 1 Teil C

Nr. 1 a-c

Nr. 2 a-c

Nr. 3 a-c

Nr. 4 a-c

Teil C

1) Kürzen Sie so weit wie möglich.

a. $\frac{21}{84}$
b. $\frac{75}{225}$
c. $\frac{48}{64}$
d. $\frac{300}{400}$
e. $\frac{121}{154}$
f. $\frac{120}{150}$
g. $\frac{80}{240}$
h. $\frac{56}{72}$

i. $\frac{63}{77}$
j. $\frac{18}{36}$
k. $\frac{245}{490}$
l. $\frac{504}{720}$
m. $\frac{30}{210}$
n. $\frac{51}{68}$
o. $\frac{42}{70}$
p. $\frac{35}{63}$

q. $\frac{12}{60}$
r. $\frac{30}{36}$
s. $\frac{225}{250}$
t. $\frac{81}{99}$
u. $\frac{21}{49}$
v. $\frac{50}{65}$
w. $\frac{15}{75}$
x. $\frac{16}{64}$

Binomische Formeln

1. Binomische Formel: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b})^2$$

$$= (\mathrm{a}+\mathrm{b})(\mathrm{a}+\mathrm{b}) = \mathrm{a}(\mathrm{a}+\mathrm{b}) + \mathrm{b}(\mathrm{a}+\mathrm{b}) = \mathrm{a}^2 + \mathrm{ab} + \mathrm{ba} + \mathrm{b}^2$$

$$= \mathrm{a}^2 + 2\mathrm{ab} + \mathrm{b}^2$$

2. Binomische Formel: $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 - 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$

$$(\mathrm{a}-\mathrm{b})^2$$

$$= (\mathrm{a}-\mathrm{b})(\mathrm{a}-\mathrm{b}) = \mathrm{a}(\mathrm{a}-\mathrm{b}) + \mathrm{b}(\mathrm{a}-\mathrm{b}) = \mathrm{a}^2 - \mathrm{ab} - \mathrm{ba} + \mathrm{b}^2$$

$$= \mathrm{a}^2 - 2\mathrm{ab} + \mathrm{b}^2$$

3. Binomische Formel: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2$

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b})(\mathrm{a}-\mathrm{b})$$

$$= \mathrm{a}(\mathrm{a}-\mathrm{b}) + \mathrm{b}(\mathrm{a}-\mathrm{b}) = \mathrm{a}^2 - \mathrm{ab} + \mathrm{ba} - \mathrm{b}^2$$

$$= \mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2$$

Übungsaufgaben

AB 1 Teil B

Nr. 1 a-c & f

Nr. 2 a,b,d

Zusatzaufgaben Nr. 1 a-c

Teil B

1) Rechnen Sie die binomischen Formeln aus.

a. $(5x+3)^2$
b. $(3-4x)^2$
c. $(0{,}5x-6y)^2$
d. $(10a+11b)^2$
e. $5(3a-6)^2$
f. $(3a-b)(3a+b)$
g. $-(3a-b)(3a+b)$
h. $(3a-b)(b-3a)$

2) Fassen Sie zu einer binomischen Formel zusammen.

a. $4x^2-12x+9$
b. $a^2+12ab+36b^2$
c. $25x^2+70x+49$
d. $9x^2-4$
e. $0{,}25a^2-3ab+9b^2$
f. $121a^2+132ab+36b^2$
g. $225x^2-9y^2$

3) Welchen Wert muss der Platzhalter annehmen, um daraus eine binomische Formel bilden zu können?

a. $25x^2-\blacksquare xy+4y^2$
b. $\blacksquare a^2-36ab+36b^2$
c. $25x^2-\blacksquare y^2$
d. $\blacksquare x^2+54x+9$
e. $49a^2+112ab+\blacksquare b^2$
f. $\blacksquare-84a+9a^2$
g. $\blacksquare-9a^2$

Themenüberblick

Hochschule für Wirtschaft und Gesellschaft Ludwigshafen

Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
• Grundrechenarten und Rechenregeln • Vorzeichenregeln • Zahlenmengen • Bruchrechnen • Prozentrechnen • Binomische Formeln	• Potenzen • Wurzeln • Logarithmus • Summenzeichen • Produktzeichen	• Folgen und Reihen • Lineare Gleichungen • Funktionen • Definitions- und Bildmenge • Lineare Funktionen	• Quadratische Gleichungen • Quadratische Ergänzungen • Mitternachtsformel, pq-Formel • Ableitungen	• Quadratische Funktionen • Umkehrfunktion • Grenzwerte • Betrag

Potenzgesetze I

Hochschule für Wirtschaft und Gesellschaft Ludwigshafen

$$\text{Basis} \rightarrow a^{n} \leftarrow \text{Exponent} \quad = \underbrace{a * a * \ \dots * a * a}_{\text{n Faktoren}}$$

1) Potenzen mit **gleicher Basis** werden multipliziert/dividiert, indem man die Exponenten addiert/subtrahiert und die Basis beibehält:

$a^n * \ a^m = a^{n+m}$ $\qquad$ $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

2) Potenzen mit **gleichem Exponenten** werden multipliziert/dividiert, indem man das Produkt/den Quotienten der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert:

$a^n * \ b^n = (a * b)^n$ $\qquad$ $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$

Potenzgesetze II

3) Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert und die Basis beibehält: $(a^n)^m = a^{n*m}$

4) Sinnvolle Festlegung bei $a \neq 0$:

$$a^0 = 1 \qquad a^{-1} = \frac{1}{a^1} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

3) Die n-te Potenz einer negativen Zahl ist bei geraden Exponenten n positiv, bei ungeraden Exponenten n negativ:

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{gerades n} \\ -1 & \text{ungerades n} \end{cases}$$

Zusammenfassung Potenzgesetze

	Gleiche Basis	Gleicher Exponent
Multiplizieren	$a^n * a^m = a^{n+m}$	$a^n * b^n = (a * b)^n$
Dividieren	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$
Potenzieren	$(a^n)^m = a^{n*m}$	

Gibt es bei einem Term KEINE Übereinstimmung von Basis oder Exponent, lässt sich der Term NICHT vereinfachen.

Potenzen können nur addiert werden, wenn Basis UND Exponent übereinstimmen.

AB 2 Teil A

Nr. 1 a-e & p-r

Nr. 2 o-r

Mathematik-Vorkurs

Aufgabenblatt 2

Teil A

1) Wenden Sie die Potenzgesetze an.

a. $5^4 \cdot 5^2$

b. $x \cdot x^3$

c. $(2^2)^3$

d. $\frac{4^4}{4^3}$

e. 2^{x-1}

f. $(-16)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$

g. $\left(-\frac{x}{4}\right)^2$

h. $(-x^2)^4$

i. $2x^2 \cdot x^4$

j. $\frac{21x^5}{3x}$

k. $\frac{1}{5}a^4 \cdot a$

l. $\left(-\frac{4}{7}x\right)^3$

m. $\frac{10^4}{2^4} + 5^4 + \frac{5}{x^{-2}}$

n. $4x^2 \cdot (x^4 - 5x)$

o. $4^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2^{-3}$

p. $(5^3 \cdot 5^4)^{-1}$

q. $(2x^{-3} \cdot y^2)^2$

r. $\left(\frac{a^2}{2b^{-2}}\right)^3$

Wurzeln I

Suche nach einer Basis einer Potenz:

$$\boldsymbol{x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}}$$

n= Wurzelexponent
a= Radikand

Die Wurzel ist die nicht-negative Lösung der Gleichung $x^n = a$.

Beispiel:

$$x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt[2]{16} = \pm 4$$

→ Zweideutiger Rechenausdruck

Wurzeln II

Für das Rechnen mit Wurzeln gilt:

- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
- $(\sqrt[n]{a})^n = a^{\frac{1}{n} * n}$
- $\sqrt[n]{a * b} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

- $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$ (Quadratwurzel)
- $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$
- $\sqrt{a} * \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} * a^{\frac{1}{2}} = \mathrm{a}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m*n]{a}$
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

Merke: Wenn keine Zahl auf der Wurzel steht, ist sie immer eine Quadratwurzel.

AB 2 Teil A

Nr. 3 a-f

3) Wenden Sie die Wurzelgesetze an.

a. $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}$

b. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

c. $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$

d. $r\sqrt{lo} \cdot at\sqrt{s}$

e. $\dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{a}}$

f. $\left(\sqrt[6]{9}\right)^3$

g. $\sqrt{5a} \cdot b\sqrt{3s}$

h. $h\sqrt[3]{mi} \cdot au\sqrt[3]{ch}$

i. $\left(\sqrt[3]{4}\right)^2$

j. $\sqrt{\sqrt{a}}$

k. $z\sqrt[5]{5x} \cdot \sqrt[5]{2y}$

l. $\sqrt[4]{9}$

m. $\dfrac{\sqrt[3]{abx}}{\sqrt[2]{ab}}$

n. $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$

o. $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{7}$

p. $5^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{25}$

q. $\dfrac{\sqrt{a^3b^5}}{\sqrt{a \cdot b^3}}$

r. $\sqrt[2]{\sqrt[5]{9}}$

Logarithmus

Hochschule
für Wirtschaft und Gesellschaft
Ludwigshafen

Suche nach Exponenten einer Potenz:

$$\boldsymbol{a^n = x \Leftrightarrow n = \log_a x}$$

Der Logarithmus einer Zahl x zur Basis a ist die Zahl n, mit der man a potenzieren muss, um x zu erhalten.

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^k = k * \log_a x$$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a(a^x) = x$$

Dabei gilt: Das Argument des Logarithmus muss **immer positiv** sein!

Für jedes $\boldsymbol{a}$ gilt: $\log_a 1 = 0$, da $a^0 = 1$

$\log_a a = 1$, da $a^1 = a$

Natürlicher Logarithmus und Zehnerlogarithmus

1. Besondere Basis: e (die eulersche Zahl $e \approx 2,718281828$)

Der Logarithmus zur Basis e heißt **natürlicher Logarithmus ($\ln$)**.

$$e^n = a \Leftrightarrow n = \log_e a = \ln a$$

2. Besondere Basis: 10 (der Logarithmus zur Basis 10 heißt Zehnerlogarithmus ($\lg$).)

$$10^n = a \Leftrightarrow n = \log_{10} a = \lg a$$

Wichtige Umformung: $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$ ⇨

Info: Basis a=10 (kann in den Taschenrechner eingegeben werden)

3. Dualer (binärer) Logarithmus

$$2^n = a \Leftrightarrow n = \log_2 a = \operatorname{lb} a$$

Wozu braucht man den Logarithmus?

Aufgabe 1

Ein Kapital wird jährlich mit 5% verzinst. Nach wie vielen Jahren hat sich das Kapital mit Zinsen und Zinseszinsen verdoppelt?

Aufgabe 2

Ein Student spart für sein erstes Auto. Er will dafür 20.000 € ausgeben. Er hat 12.000 € aus seinem Sparkonto angespart, dort wird das Geld mit 5,75 % verzinzst. Wie lange muss er sparen?

Zusammenhang Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Potenzgleichung: $x^n = a$

➡ **Basis gesucht (Wurzel):** $x^n = a \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} = x$

➡ **Exponenten gesucht (Logarithmus):** $a^x = \mathrm{n} \Leftrightarrow \log_a n = x$

Übungsaufgaben

AB 2 Teil A

Nr. 7 a-e

Nr. 8 a-c

Nr. 9 a-c

7) Berechnen Sie die Logarithmen.

a. $\log_2 8$

b. $\log_3 9$

c. $\log_9 81$

d. $\log_{17} 1$

e. $\log_9 3$

f. $\log_y \left(\frac{1}{y^z}\right)$

g. $\log_{\sqrt{3}} 9$

h. $\log_{\frac{4}{9}} \left(\frac{3}{2}\right)$

8) Formen Sie um (Basis unberücksichtigt).

a. $\log\left(\frac{x \cdot y}{z}\right)$

b. $\log\left(\frac{x^2 \cdot \sqrt{y}}{10z^5}\right)$

c. $\log \sqrt[8]{ab}$

d. $\log\left(\frac{y^2}{\sqrt{z} \cdot x}\right)$

Das Summenzeichen

Obere Grenze → n

Summationsterm

$$\sum_{i=0}^{n} q_i$$

Laufindex → $i = 0$ ← Untere Grenze

Alle Ausdrücke q_i werden aufsummiert, wobei der Parameter i alle natürlichen Zahlen von der unteren Summengrenze bis n durchläuft.

$$\sum_{i=0}^{n} q_i = q_0 + q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_{n-1} + q_n$$

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i \pm \sum_{i=0}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=0}^{n} c * a_i = c * \sum_{i=0}^{n} a_i$$

Das Produktzeichen

Analog bietet das Produktzeichen die Möglichkeit, ein Produkt vereinfacht darzustellen:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 * a_2 * \cdots * a_n$$

Multipliziere alle Ausdrücke a_1, wobei der Parameter i alle natürlichen Zahlen von 1 bis n durchläuft.

AB 2 Teil B

Nr. 1 a-d

Teil B

1) Berechnen Sie die Summen.

a. $\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i}$

b. $\sum_{i=-2}^{2} i$

c. $\sum_{i=5}^{8} 6i$

d. $\sum_{i=1}^{10} (i+2)$

e. $\sum_{i=2}^{4} \frac{i^2-1}{i^2+1}$

f. $\sum_{i=13}^{17} (i-17)$

g. $\sum_{i=1}^{4} (i^2+1)$

h. $\sum_{i=1}^{50} (4i+3i^2-20) + \sum_{i=1}^{50} (3i-4i^2+10) - \sum_{i=1}^{50} (30+7i-i^2)$

Themenüberblick

Hochschule für Wirtschaft und Gesellschaft Ludwigshafen

Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
• Grundrechenarten und Rechenregeln • Vorzeichenregeln • Zahlenmengen • Bruchrechnen • Binomische Formeln	• Potenzen • Wurzeln • Logarithmus • Summenzeichen • Produktzeichen	• Folgen und Reihen • Lineare Gleichungen • Funktionen • Definitions- und Bildmenge • Lineare Funktionen	• Quadratische Gleichungen • Quadratische Ergänzungen • Mitternachtsformel, pq-Formel • Ableitungen	• Quadratische Funktionen • Umkehrfunktion • Grenzwerte • Betrag

Folgen

Eine **Folge** (genauer: Zahlenfolge) ist eine **Auflistung** von Zahlen, deren **Reihenfolge festgelegt** ist. Die einzelnen Zahlen der Folge nennt man **Glieder**. Das erste Glied (d.h. die erste Zahl) der Folge heißt $\boldsymbol{a_1}$, das zweite $\boldsymbol{a_2}$, … das n-te Glied heißt $\boldsymbol{a_n}$.

Beispiel: $(\mathbf{1, 7, 4, 21, 16}, \dots)$, wobei $\boldsymbol{a_1} = \mathbf{1};\ \boldsymbol{a_2} = \mathbf{7};\ \boldsymbol{a_3} = \mathbf{4}; \dots$

Für einige Folgen kann man die Vorschriften angeben, nach der die einzelnen Glieder berechnet werden. Für andere Folgen ist das nur schwer möglich oder unmöglich.

Beispiel: $(\mathbf{1, 2, 4, 8, 16}, \dots)$ Das zugehörige Bildungsgesetz lautet $\boldsymbol{a_n} = \mathbf{2}^{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}$ für $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{1}$

Übung zu Folgen

1. **Schreiben Sie die Werte der nächsten drei Glieder folgender Zahlenfolgen auf.**

   a) $f(n) = 1; 4; 9; 16$

   b) $f(n) = 0; 4; 8; 12; 16; \ldots$

2. **Finden und formulieren Sie das Bildungsgesetz für die jeweilige Folge.**

Folgen und Reihen

Gegeben sei eine Zahlenfolge $(\boldsymbol{a_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$.

Die Summe der ersten $\boldsymbol{n}$ Folgenglieder wird mit $\boldsymbol{s_n}$ bezeichnet: $\boldsymbol{s_n} = \sum_{1=0}^{n} \boldsymbol{a_i}$.

Die Zahlenfolge $(\boldsymbol{s_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ heißt nun die (endliche) Reihe zu $\boldsymbol{a_n}$.

Die einzelnen Folgenglieder der Zahlenfolge $(\boldsymbol{s_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ bestehen also aus Summen über Folgenglieder der Zahlenfolge $(\boldsymbol{a_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$.

Beispiel:

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**…**
$\boldsymbol{a_n}$	1	2	4	8	16	32	64	…
$\boldsymbol{s_n}$	1	3	7	15	31	63	127	…

Geometrische Folge

Hochschule
für Wirtschaft und Gesellschaft
Ludwigshafen

Bei einer **geometrischen Folge** ist das Verhältnis zweier benachbarter Folgeglieder konstant:

$$\mathbf{q} = \frac{a_5}{a_4} = \frac{a_3}{a_2}$$

Das zugehörige Bildungsgesetzt lautet:

$$a_n = a_o \cdot q^n$$

Beispiel:

$(3, 6, \overbrace{12, 24}^{\cdot 2}, \overbrace{48, 96}^{\cdot 2}, 192, 384, 768, 1536, \dots)$ mit $\mathrm{q} = 2$ und $\mathrm{n} = 9$

$a_2 = 3 \cdot 2^2 = 12$

$a_9 = 3 \cdot 2^9 = 1536$

Geometrische Reihe I

Bei einer **geometrischen Reihe** werden alle Glieder einer geometrischen Folge addiert:

$$s_n = a_0 \sum_0^n q^i = a_o \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \quad \text{für } q \neq 1$$

$$s_n = a_o \cdot (n+1) \quad \text{für } q = 1$$

Beispiel:

$(3, 6, \overbrace{12, 24}^{\cdot 2}, \overbrace{48, 96}^{\cdot 2}, 192, 384, 768, 1536, \ldots)$ mit $q = 2$ und $n = 9$

$$s_2 = 3 \cdot \frac{2^{2+1}-1}{2-1} = 21$$

$$s_9 = 3 \cdot \frac{2^{9+1}-1}{2-1} = 3069$$

Geometrische Reihe II

Fängt die Summe erst bei $\mathrm{i} = 1$ an, muss das obere Glied abzogen werden:

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} q^i = a_0 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} - a_0 \cdot \frac{q^{0+1} - 1}{q - 1}$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} q^i = a_0 \cdot \left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} - 1 \right)$$

Fängt die Summe erst bei $\mathrm{i} = 2$ an, müssen das obere Glied und das 1. Glied abgezogen werden:

$$a_0 \sum_{i=2}^{n} q^i = a_0 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} - a_0 \cdot \frac{q^{1+1} - 1}{q - 1}$$

$$a_0 \sum_{i=2}^{n} q^i = a_0 \cdot \left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} - \frac{q^2 - 1}{q - 1} \right)$$

AB 2 Teil B

Nr. 2 a-c

2) Wenden Sie die geometrische Reihe an.

a. $a = 3$ $\sum_{i=0}^{5} a^i$

b. $a = 5$ $\sum_{i=1}^{4} a^i$

c. $a = 9$ $\sum_{i=0}^{3} a^i + \sum_{i=0}^{4} a^i$

d. $a = 2$ $\sum_{i=1}^{15} a^i - \sum_{i=0}^{9} a^i$

e. $a = 3$ $\sum_{i=1}^{6} a^i$

Lineare Gleichungen lösen I

Beispiel: $10x - 2(5x + 7) = -2\,(2 - x)$

1) **Auf beiden Seiten Klammern und Brüche auflösen:**

$$10x - 10x - 14 = -4 + 2x$$

2) **Gleichartige Glieder zusammenfassen:**

$$-14 = -4 + 2x$$

3) **Addiere/Subtrahiere so, dass alle Variablen auf der linken und alle absoluten Werte auf der rechten Seite stehen und weiter zusammengefasst werden können:**

$$-2x = 10$$

Lineare Gleichungen lösen II

4) **Multipliziere/Dividiere so, dass die Variable isoliert wird:**

$$\boldsymbol{x = -5}$$

Jede auf eine Gleichung angewendete Operation muss auf **beiden** Seiten der Gleichung angewendet werden!

3 mögliche Fälle:

1. **Unendlich viele Lösungen**, falls sich $0 = 0$ ergibt.

   (d.h. Gleichung gilt für alle $x \in \mathbb{R}$)

2. **Nicht lösbar** bei **Widerspruch**, d.h. rechte Seite unterscheidet sich von der linken.

3. **Eindeutige Lösung** mit $x = a$.

Zusammenfassung

Schritte zur Lösung einer linearen Gleichung:

1) Auf beiden Seiten Klammern & Brüche auflösen.

2) Gleichartige Glieder zusammenfassen.

3) Addiere/Subtrahiere so, dass alle Variablen auf der linken und alle absoluten Werte auf der rechten Seite stehen und weiter zusammengefasst werden können.

4) Multipliziere/Dividiere so, dass die Variable isoliert wird.

AB 3 Teil A

Nr. 1 a,b,c
Nr. 2 b, c,i

AB 3 Teil C

Nr. 1 a+b

Mathematik-Vorkurs

Aufgabenblatt 3

Teil A

1) Stellen Sie die Gleichung nach jeder Variablen um.

a. $L = M + N$

b. $F = G - H$

c. $n = \frac{v}{d \cdot a}$

d. $v = \frac{s}{t}$

e. $P = \frac{m \cdot g \cdot s}{t}$

f. $I = \frac{F + G}{2}$

g. $A = B \cdot C \cdot D$

h. $A = \frac{a}{4}(b^2 - c^2)$

i. $a = \frac{m \cdot z + m \cdot x}{2}$

j. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

k. $v = \sqrt{2g \cdot h}$

l. $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Funktionsbegriff

Eine Funktion $f(x)$ ist eine eindeutige Zuordnung der Elemente zweier Mengen. Dabei wird jedem Element x aus einer Definitionsmenge D **genau ein Element** y aus der Wertemenge W zugeordnet.

Mögliche Darstellungen von Funktionen:

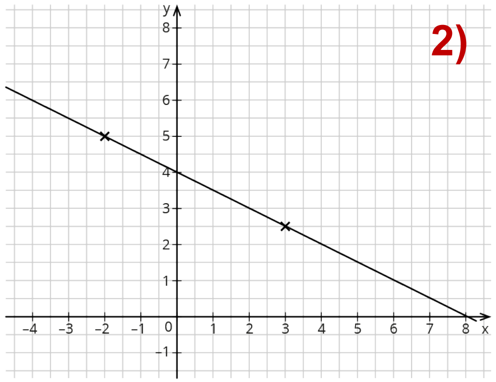
1) **Funktionsgleichung f(x)**

2) **Graph im Koordinatensystem**

3) **Wertetabelle**

4) **Pfeildiagramm**

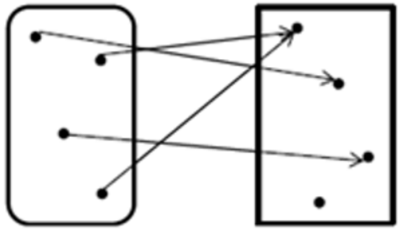
2)



3)

x			
$f(x)$			

4)



Darstellung von Funktionen

Besitzt der Definitionsbereich einer Funktion nur endlich viele Elemente, kann die Funktion durch eine Wertetabelle festgelegt werden.

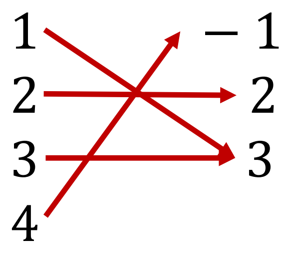
Beispiel: $\boldsymbol{D = \{1, 2, 3, 4\}}$

$\boldsymbol{x \in D}$	$\boldsymbol{f(x)}$
1	3
2	2
3	3
4	-1

Weitere Darstellungen für endliche Definitionsbereiche:

$$\begin{aligned} f(1) &= 3 \\ f(2) &= 2 \\ f(3) &= 3 \\ f(4) &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 3 \\ 2 &\mapsto 2 \\ 3 &\mapsto 3 \\ 4 &\mapsto -1 \end{aligned}$$



Übungsaufgaben

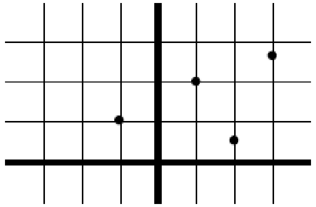
AB 3 Teil B

Nr. 1 a- g

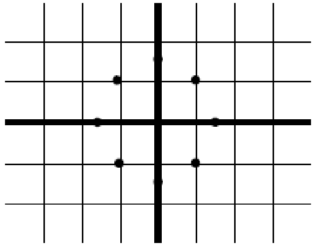
Teil B

1) Entscheiden Sie, welche der folgenden Abbildungen auch Funktionen darstellen.

a.

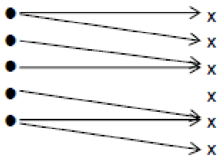


b.



c. $\{(1,1),(2,1),(1,2),(2,2)\}$

d.



e. $M = \{\text{Matrikelnummer an der FH Lu}\}$
$S = \{\text{Student an der FH Lu}\}$
$f: M \to S$

f.

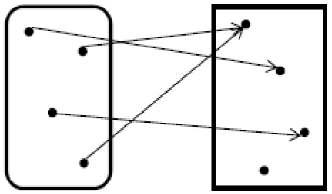
$x \in D$	$f(x)$
x	a
y	a
z	b
z	c

g.

$x \in D$	$f(x)$
1	-1
2	2
3	0
4	-1

h. $\{(1,2),(0,3),(2,1),(-1,-4)\}$

i.



Definitions- und Wertemenge

Die Definitionsmenge $\boldsymbol{D}$ enthält alle Zahlen, die für $\boldsymbol{x}$ eingesetzt werden dürfen.

Darstellungsmöglichkeiten:

$\mathrm{D} = \mathbb{R}$	Die Definitionsmenge ist die Menge der reellen Zahlen
$\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$	Die Definitionsmenge ist die Menge der reellen Zahlen ohne 1
$\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \{1, 5, 7, 20\}$	Die Definitionsmenge ist die Menge der reellen Zahlen ohne $1, 5, 7, 20$
$\mathrm{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 3\}$	Die Definitionsmenge ist die Menge aller x. x muss größer als -5 und kleiner als 3 sein.

Definitions- und Wertemenge

Hochschule für Wirtschaft und Gesellschaft Ludwigshafen

Überlegungen zur Definitionsmenge:

1) Nenner $\neq \mathbf{0}$, da die Division durch $\mathbf{0}$ nicht erlaubt ist
2) Argument der Wurzel $\geq \mathbf{0}$
3) Argument des Logarithmus $> \mathbf{0}$

Beispiel: $\mathrm{f(x)} = \sqrt{49 - x^2}$

Die Wertemenge W beinhaltet alle Zahlen, die beim Einsetzen von Zahlen in $\boldsymbol{x}$ herauskommen.

Übungsaufgaben

Hochschule
für Wirtschaft und Gesellschaft
Ludwigshafen

AB 3 Teil D

Nr. 1 a - f

Teil D

1) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich!

a. $f(x) = 2x^2$

b. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

c. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$

d. $f(x) = \sqrt{x}$

e. $f(x) = 2 : \frac{3}{x}$

f. $f(x) = \log_2(x-2)$

g. $f(x) = \frac{1}{x+1} + 5$

h. $f(x) = \frac{2x}{3x-4}$

i. $f(x) = \frac{36}{x+6}$

j. $f(x) = 2 - 3x$

k. $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

l. $f(x) = \sqrt{2x-3}$

m. $f(x) = -x^2 + 1$

n. $f(x) = \sqrt{4-x}$

o. $f(x) = x - x^2$

p. $f(x) = \frac{1}{x+3}$

q. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

r. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

s. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

t. $f(x) = 4 - \log x$

u. $f(x) = \log x^3$

v. $f(x) = \frac{3}{x^2 + 1}$

w. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{5}{x-3}$

x. $f(x) = \sqrt{5x-2}$

y. $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$

z. $f(x) = \sqrt{10-9x}$

Lineare Funktionen I

Steigung
Schnitt mit der y-Achse

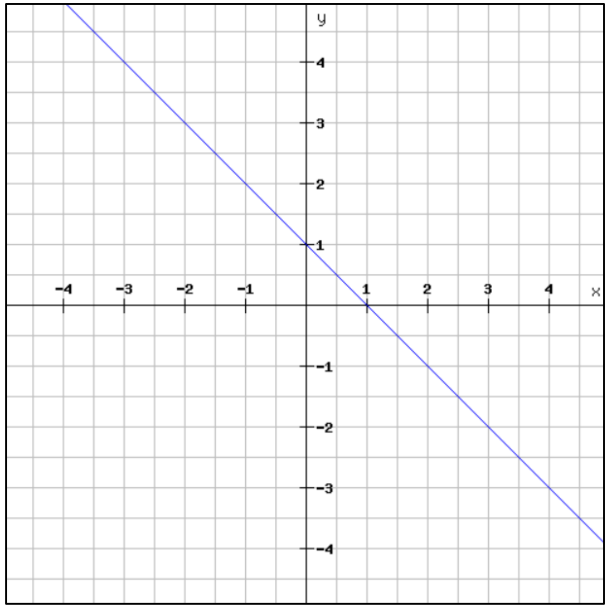
$$\boldsymbol{y = a x + b}$$

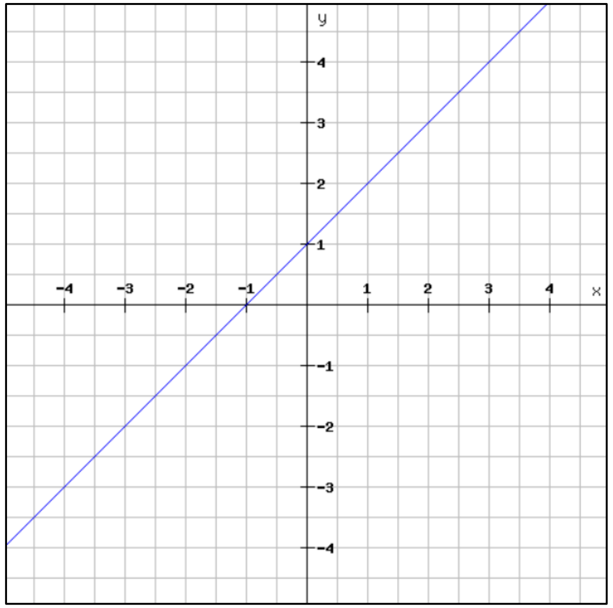
Dies ist eine Zuordnung, bei der jedem x das dazugehörige y zugeordnet wird.

Das heißt: Zu jedem beliebigen x-Wert lässt sich der y-Wert ermitteln und man bekommt einen Punkt (x|y) des Graphen der Funktion.

$\boldsymbol{y = -1x + 1}$

$\boldsymbol{a < 0 \ \rightarrow}$ **fallend**





$\boldsymbol{y = +1x + 1}$

$\boldsymbol{a > 0 \ \rightarrow}$ **steigend**

AB 3 Teil B

Nr. 2 a -c

2) Zeichen Sie die Graphen folgender Funktionen jeweils in ein Koordinatensystem. Verwenden Sie möglichst keine Wertetabelle sondern nutzen den Schnittpunkt zur y-Achse und das Steigungsdreieck. Berechnen Sie den Schnittpunkt mit der x-Achse und überprüfen Sie das Ergebnis anhand des Graphen.

a. $f(x) = -\frac{2}{3}x + 2$

b. $f(x) = -4x + 5$

c. $f(x) = 2x - 4$

h. $f(x) = -x + 3$

i. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

j. $f(x) = -\frac{1}{2}x - 2$

Lineare Funktionen II

Lineare Funktionen sind eindeutig festgelegt durch:

1) Gleichung: $y = ax + b$

oder

2) 2 Punkte: $P(x_1|y_1)$ $Q(x_2|y_2)$

$$\left.\begin{aligned} ax_1 + b &= y_1 \\ ax_2 + b &= y_2 \end{aligned}\right\}$$ **2 Gleichungen mit 2 Unbekannten → damit stehen a und b fest**

oder

3) Steigung a und einen Punkt $P(x_1|y_1)$:

$ax_1 + b = y_1$ **→ Gleichung nach b umstellen**

Lineare Funktionen III

Hochschule für Wirtschaft und Gesellschaft Ludwigshafen

1) Schnittpunkte mit den Achsen

- Schnittpunkt mit der y- Achse: $f\,(\mathrm{x}{=}0) = \mathrm{y} = \mathrm{m} \cdot 0 + \mathrm{b}$ → $\mathrm{y} = \mathrm{b}$
- Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen): $f\,(\mathrm{x}) = 0 = \mathrm{m} \cdot \mathrm{x} + \mathrm{b}$ → $\mathrm{x} = -\frac{b}{m}$

2) Schnittpunkte zweier Geraden

$f_1\,(\mathrm{x}) = \mathrm{y} = m_1 \cdot \mathrm{x} + b_1$ und $f_1\,(\mathrm{x}) = \mathrm{y} = m_2 \cdot \mathrm{x} + b_2$

$f_1\,(\mathrm{x}) = f_2\,(\mathrm{x})$

$m_1 \cdot x + b_1 = m_2 \cdot x + b_2$ → $\mathrm{x} = \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2}$

x – Wert in eine Geradengleichung einsetzen und den dazugehörigen y – Wert berechnen.

AB 3 Zusatzaufgaben

Nr. 2 b, c

&

AB 3 Teil B

Nr. 7 b, c

7) Berechnen Sie die Schnittpunkte der beiden Geraden.

a.	$g(x)=\frac{1}{2}x+2$	$h(x)=-\frac{1}{2}x+4$	d.	$g(x)=2x-1$	$h(x)=-2x+1$
b.	$g(x)=\frac{3}{4}x-4$	$h(x)=-\frac{1}{2}x-1$	e.	$g(x)=-\frac{1}{2}x+2$	$h(x)=\frac{1}{2}x+3$
c.	$g(x)=\frac{2}{3}x+2$	$h(x)=\frac{1}{2}x+3$	f.	$g(x)=\frac{3}{4}x+1$	$h(x)=\frac{1}{2}x+2$

Themenüberblick

Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
• Grundrechenarten und Rechenregeln • Vorzeichenregeln • Zahlenmengen • Bruchrechnen • Binomische Formeln	• Potenzen • Wurzeln • Logarithmus • Summenzeichen • Produktzeichen	• Folgen und Reihen • Lineare Gleichungen • Funktionen • Definitions- und Bildmenge • Lineare Funktionen	• Quadratische Gleichungen • Quadratische Ergänzungen • Mitternachtsformel, pq-Formel • Ableitungen	• Quadratische Funktionen • Umkehrfunktion • Grenzwerte • Betrag

Quadratische Gleichungen

Nach der Gestalt der quadratischen Gleichung lassen sich folgende vier Fälle unterscheiden:

1. $ax^2 = 0$
2. $ax^2 + c = 0$
3. $ax^2 + bx = 0$
4. $ax^2 + bx + c = 0$

Den 4. Fall bezeichnet man als **allgemeine Form** einer quadratischen Gleichung.

Reinquadratische Gleichungen ($a \neq 0$)

Hochschule
für Wirtschaft und Gesellschaft
Ludwigshafen

$$ax^2 + c = 0$$

Die reinquadratische Gleichung geht durch die äquivalente Umformung über in:

$$x^2 = -\frac{c}{a} \begin{cases} \frac{c}{a} > 0 & \text{keine Lösung, da } x^2 \text{ nicht negativ werden kann} \\ \frac{c}{a} = 0 & \text{genau eine Lösung } x = 0 \\ \frac{c}{a} < 0 & \text{zwei Lösungen, da } \boxed{x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}} \end{cases}$$

Beispiel: $x^2 - 81 = 0$

$x^2 = 81 \Rightarrow x_1 = 9 \qquad x_2 = -9$

Die Lösungsmenge ist also $\mathbb{L} = \{-9; 9\}$

Übungsaufgaben

Hochschule für Wirtschaft und Gesellschaft Ludwigshafen

AB 4 Teil A

Nr. 1 f, j, q

Mathematik-Vorkurs

Aufgabenblatt 4

Teil A

1) Lösen Sie jeweils mit der einfachsten Methode.

a. $x^2 + 2x + 1 = 0$
b. $x^2 + 4x = 0$
c. $(x - 7)^2 - 49 = 0$
d. $5x + 15 = 0$
e. $(x + 11)^2 - 1 = 0$
f. $x^2 - 121 = 0$
g. $2x^2 + 4x + 1 = -1$
h. $4x + 4 + x^2 = 0$
i. $(x + 2)^2 = 16$
j. $x^2 = 9$
k. $-400 + 16x^2 = 0$
l. $x^2 - 3x = -2$
m. $x^2 - 8x + 16 = 0$
n. $5x + 20x^2 = 0$
o. $x(x - 2) + 4(2 - x) = 0$
p. $4x^2 - 121 = 0$
q. $x^2 + 31 = 0$
r. $x^2 + 5x = 0$
s. $7x^2 = 567$
t. $4x^2 + 2x = 0$
u. $-7x^2 + 49 + 7 = 0$
v. $(x + 12)^2 = 9$
w. $x^2 - 5x + 6 = 0$
x. $x^2 = 10x$
y. $-10x + 25 = -x^2$
z. $x^2 = 0{,}01$

Spezielle quadratische Gleichungen

$$ax^2 + bx = 0$$

Die spezielle quadratische Gleichung geht durch Ausklammern von x über in:

$$x(ax + b) = 0$$

Ein Produkt ist null, wenn mindestens ein Faktor null ist!

$\rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = -\frac{b}{a}$

Beispiel:

$$5x^2 + 3x = 0$$

$$x(5x + 3) = 0$$

$\rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = -\frac{3}{5}$

Übungsaufgaben

AB 4 Teil A

Nr. 1 b,r,x

Mathematik-Vorkurs

Aufgabenblatt 4

Teil A

1) Lösen Sie jeweils mit der einfachsten Methode.

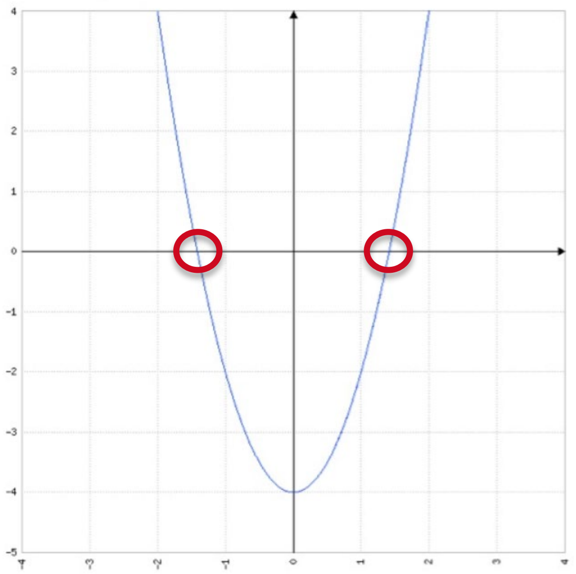
a. $x^2 + 2x + 1 = 0$
b. $x^2 + 4x = 0$
c. $(x - 7)^2 - 49 = 0$
d. $5x + 15 = 0$
e. $(x + 11)^2 - 1 = 0$
f. $x^2 - 121 = 0$
g. $2x^2 + 4x + 1 = -1$
h. $4x + 4 + x^2 = 0$
i. $(x + 2)^2 = 16$
j. $x^2 = 9$
k. $-400 + 16x^2 = 0$
l. $x^2 - 3x = -2$
m. $x^2 - 8x + 16 = 0$
n. $5x + 20x^2 = 0$
o. $x(x - 2) + 4(2 - x) = 0$
p. $4x^2 - 121 = 0$
q. $x^2 + 31 = 0$
r. $x^2 + 5x = 0$
s. $7x^2 = 567$
t. $4x^2 + 2x = 0$
u. $-7x^2 + 49 + 7 = 0$
v. $(x + 12)^2 = 9$
w. $x^2 - 5x + 6 = 0$
x. $x^2 = 10x$
y. $-10x + 25 = -x^2$
z. $x^2 = 0{,}01$

Allgemeine quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Frage: Welche Lösungsmethoden gibt es für quadratische Gleichungen?

- Mitternachts-/ABC-Formel
- pq-Formel
- Scharfes Hinsehen
- Faktorisieren
- etc.



Quadratische Ergänzung

Hochschule
für Wirtschaft und Gesellschaft
Ludwigshafen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Die allgemeine quadratische Gleichung wird durch **quadratische Ergänzung** gelöst:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$ **Quadratische Ergänzung**

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2$$ **Binomische Formel**

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2} - \frac{b}{2a}$$

Mitternachts- / ABC-Formel

Hieraus ergibt sich die **Mitternachtsformel / ABC-Formel**, mit der allgemein quadratische Gleichungen gelöst werden können:

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2} - \frac{b}{2a}$$

$$x_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}}$$

$$x_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{-c * 4a + b^2}{4a^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Pq-Formel

$$x^2 + px + q = 0 \qquad | -q$$

$$x^2 + px = -q \qquad | + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \text{ (quadratische Ergänzung)}$$

$$x^2 + 2 * \frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \qquad | \text{ binomische Formel}$$

$$(x + \frac{p}{2})^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \qquad | \pm\sqrt{}$$

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad | -\frac{p}{2}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Achtung!

Die pq-Formel darf nur für a=1 angewendet werden!
→ Unterschied zur ABC-Formel

Übungsaufgaben

AB 4 Teil A

Nr. 2 a-c & i

Nr. 3 a,b,c,f,g

2) Löse die Gleichung mit Hilfe der quadratischen Ergänzung.

a. $x^2 + 6x - 7 = 0$
b. $x^2 - 8x = -12$
c. $x^2 + 10x + 21 = 0$
d. $x^2 + 8x + 15 = 0$
e. $x^2 + x = 2$
f. $x^2 + x - 6 = 0$
g. $x^2 - 10x + 24 = 0$
h. $x^2 + 2x - 24 = 0$
i. $x^2 + 21 = 10x$
j. $x^2 + 4x - 5 = 0$

3) Lösen Sie mit der Mitternachtsformel. $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

a. $1{,}5x^2 - 4{,}2x + 0{,}78 = 0$
b. $4x^2 + 5x - 6 = 0$
c. $5x^2 + 2x - 4{,}8 = 0$
d. $2x^2 + 3{,}5x + 0{,}25 = 0$
e. $-3x^2 - 0{,}6x + 5{,}04 = 0$
f. $3x^2 + 6x + 12 = 0$
g. $-2x^2 - 3{,}2x - 1{,}28$
h. $0{,}5x^2 - 0{,}8x - 1{,}125 = 0$
i. $4x^2 + 1{,}6x + 6{,}4 = 0$
j. $-3x^2 - 37x - 12 = 0$
k. $0{,}5x^2 + 0{,}8x - 2{,}1 = 0$
l. $-0{,}5x^2 - 0{,}2x - 0{,}02 = 0$
m. $-2x^2 - 0{,}4x + 48 = 0$
n. $10x^2 + 52x + 10 = 0$
o. $0{,}7x^2 + 0{,}7x + 1{,}4 = 0$
p. $-0{,}75x^2 + 2x + \frac{5}{3} = 0$
q. $2x^2 + 1{,}6x + 0{,}32 = 0$
r. $-5x^2 - 30x - 45 = 0$
s. $3x^2 - 27{,}9x + 60{,}9 = 0$
t. $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{12}x + \frac{1}{6} = 0$
u. $x^2 + 2x - 3 = 0$
v. $x^2 - 6x + 8 = 0$
w. $x^2 - x - 6 = 0$
x. $x^2 + 3(5x + 12) = 0$
y. $3x^2 + 21x = 24$
z. $x^2 - 0{,}7x + 0{,}1 = 0$

Ableitungen

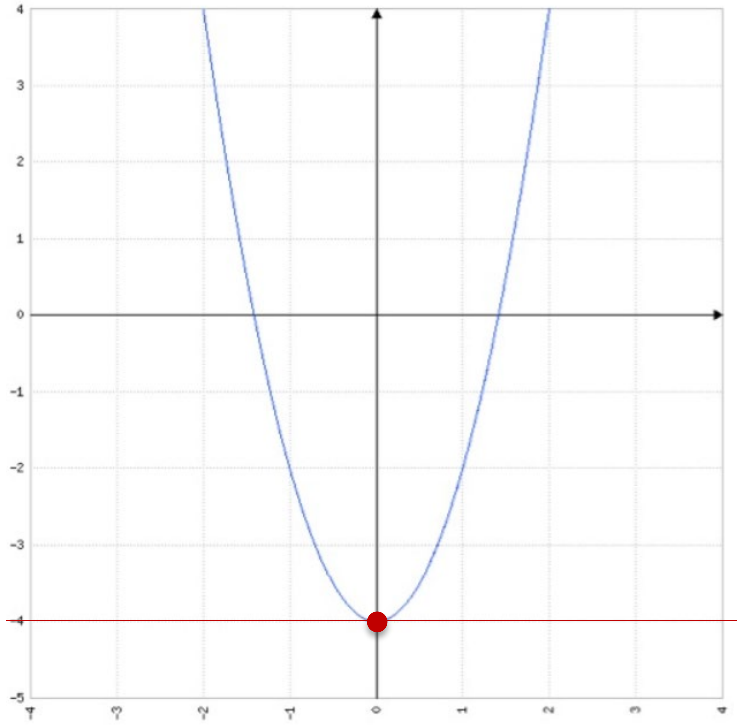
Hochschule für Wirtschaft und Gesellschaft Ludwigshafen

Ableitungsregeln

Ableitung einer Konstanten: $f(x) = C \quad \rightarrow \quad f'(x) = 0$

Ableitung von x: $f(x) = x \quad \rightarrow \quad f'(x) = 1$

Ableitung einer Potenz: $f(x) = x^n \quad \rightarrow \quad f'(x) = n * x^{n-1}$



Ein lokales Maximum liegt an dem Punkt vor, an dem die Ableitungstagente eine Steigung von 0 hat.

Übungsaufgaben

Bilden Sie die die erste Ableitung folgender Funktionen:

a) $f\,(x) = x^2$

b) $f\,(x) = 3x^2$

c) $f\,(x) = 5x^2 - 4$

d) $f\,(x) = 2x^2 + 4x + 2$

e) $f\,(x) = 9x^2 - 0{,}3 - 1$

f) $f\,(x) = 9x^4 - 4x^2 - 8$

Übungsaufgaben

Führen sie die Kurvendiskussion für folgende Funktionen durch:

$$f(x) = 3x^2 - 6x - 4$$

a) Wertetabelle
b) Graph
c) Nullstellen
d) Y-Achsenabschnitt
e) Extrema

Themenüberblick

Hochschule für Wirtschaft und Gesellschaft Ludwigshafen

Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
• Grundrechenarten und Rechenregeln • Vorzeichenregeln • Zahlenmengen • Bruchrechnen • Binomische Formeln	• Potenzen • Wurzeln • Logarithmus • Summenzeichen • Produktzeichen	• Folgen und Reihen • Lineare Gleichungen • Funktionen • Definitions- und Bildmenge • Lineare Funktionen	• Quadratische Gleichungen • Quadratische Ergänzungen • Mitternachtsformel, pq-Formel • Ableitungen	• Quadratische Funktionen • Umkehrfunktion • Grenzwerte • Betrag

Übungsaufgabe

Gegeben sind das Preis-Absatz-Funktion $p(x)$ und die Kostenfunktion $K(x)$:

$$\boldsymbol{p(x) = 400 - 0{,}02x;} \qquad \boldsymbol{x \in [0; 20.000]}$$

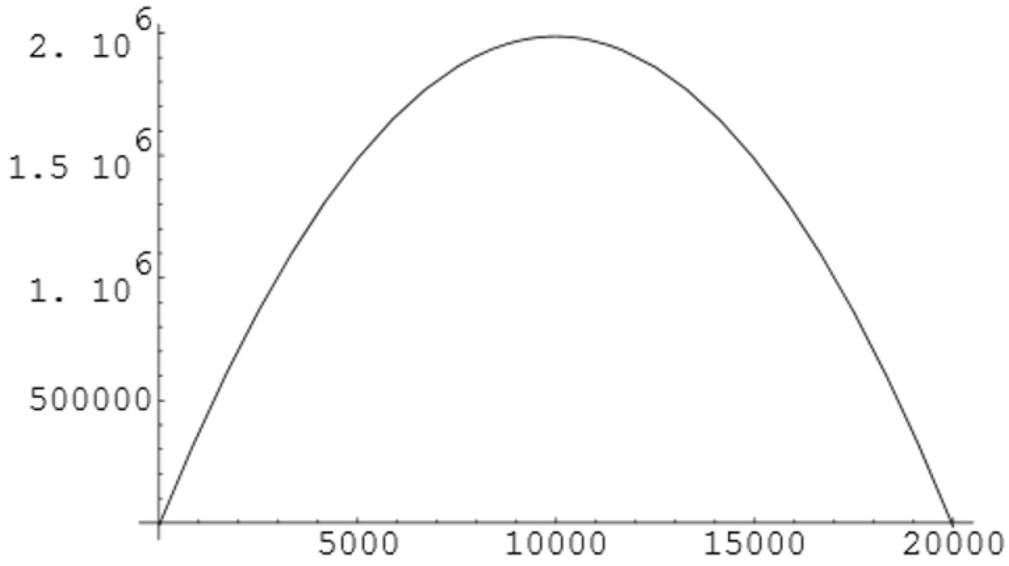
$$\boldsymbol{K(x) = 10.000 + 0{,}4x;} \qquad \boldsymbol{x \in [0; \infty]}$$

a) Ermitteln Sie den Gewinn-maximalen Preis und die Gewinn-maximale Menge (nehmen Sie hierbei das lokale Maxima als global an)

b) Zeichnen Sie den Graphen

Lösung der Aufgabe

Die Gewinnfunktion $G(x) = p(x) * x - K(x) = -0{,}02x^2 + 399{,}6\text{x} - 10.000$ sieht wie folgt aus:



Notwendige Bedingung:

$$0 \; = \; G'(x) = -0{,}04x + 399{,}6 \Leftrightarrow \text{x} = 9.990$$

Hinreichende Bedingung:

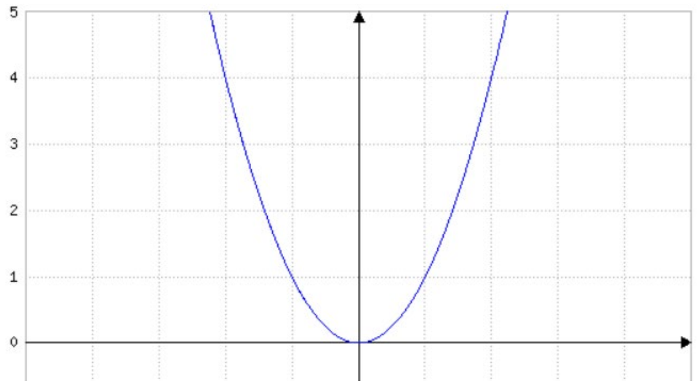
$G''(x) = -0{,}04 <_{immer} 0$; d.h. $x = 9.990 \text{ glob. Max.}$

Gewinn-maximale Menge 9.990 ME

Gewinn-maximaler Preis $p(9.990) = 200{,}2$ GE

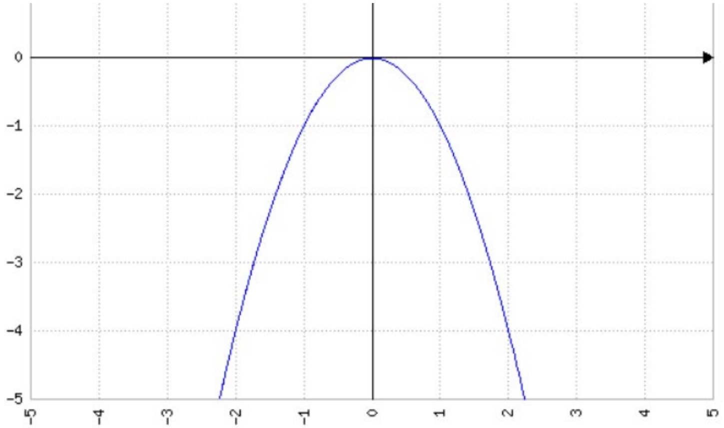
Quadratische Funktionen I

$$y = ax^2 + bx + c$$



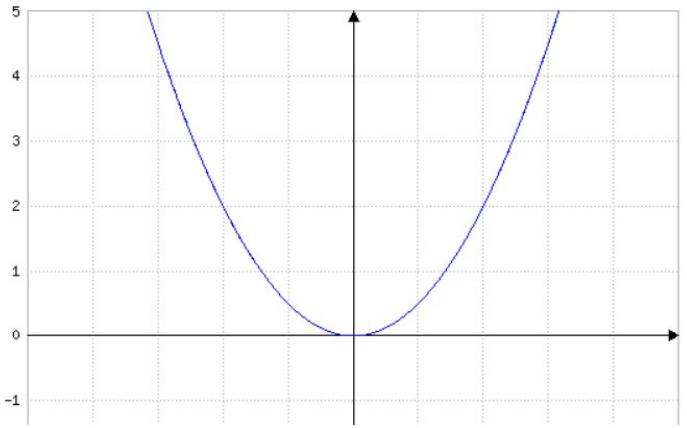
$y = x^2$

$a > 0$ → nach oben geöffnet



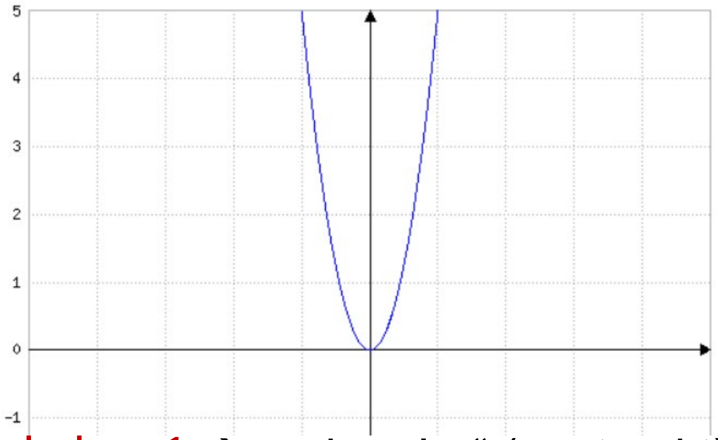
$y = -x^2$

$a < 0$ → nach unten geöffnet



$y = 0{,}5x^2$

$|a| < 1$ → „breiter“ (gestaucht)



$y = 5x^2$

$|a| > 1$ → „schmaler“ (gestreckt)

Quadratische Funktion II

Scheitelpunktform mithilfe der quadratischen Ergänzung

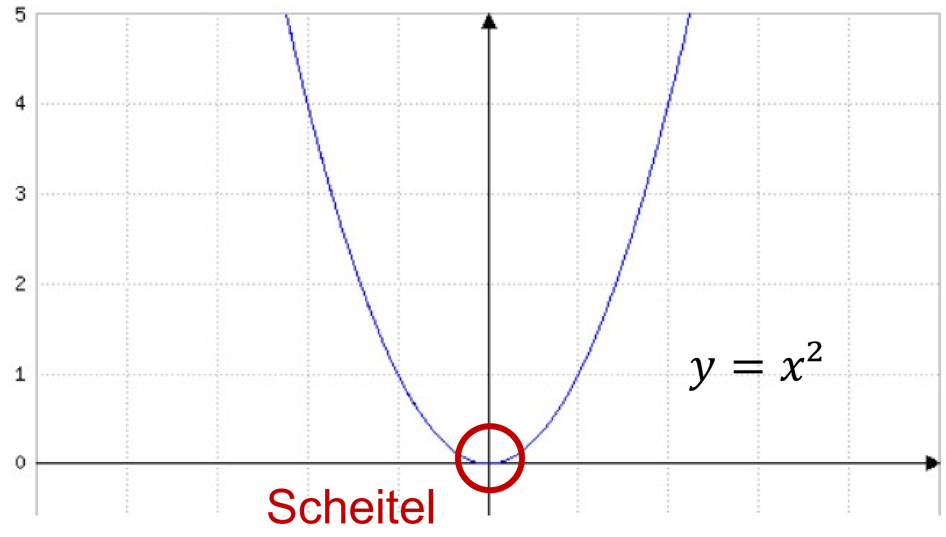
$$y = a * \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

$$y = a * \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$$

$$y = a * \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$y = a * \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

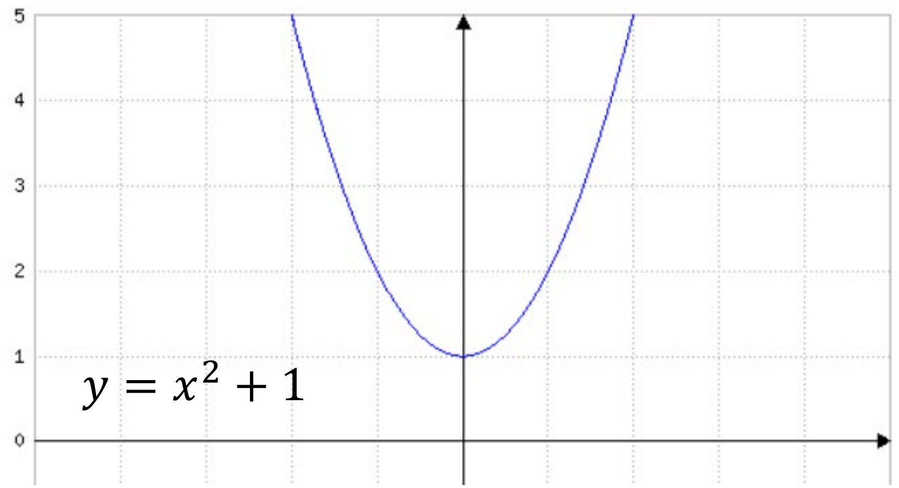
$$\boldsymbol{x_S = -\frac{b}{2a}} \qquad \boldsymbol{y_S = -\frac{b^2}{4a} + c}$$



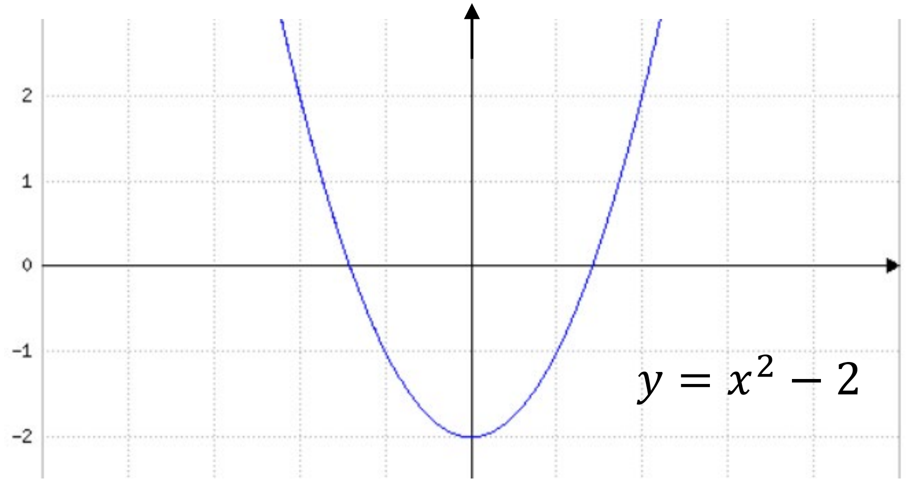
$$\boldsymbol{f(x) = (x + x_s)^2 + y_s}$$

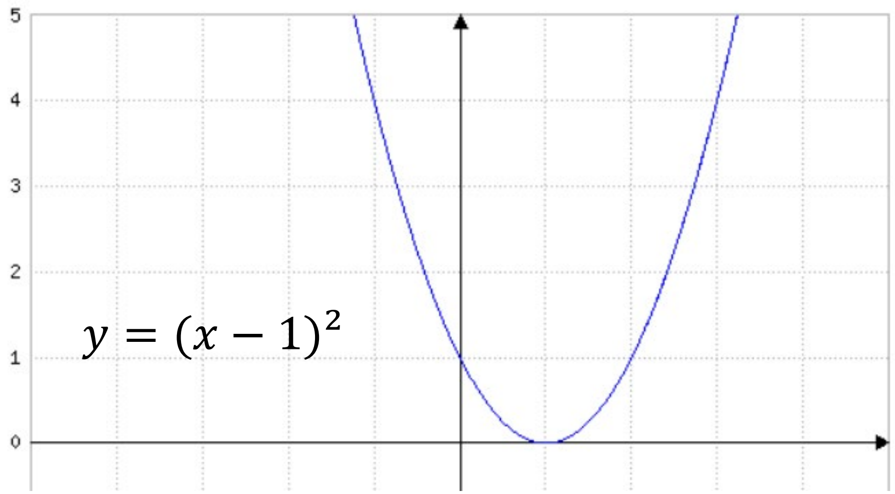
Scheitelpunkt $\boldsymbol{S\ (-x_s|y_s)}$

Quadratische Funktionen III

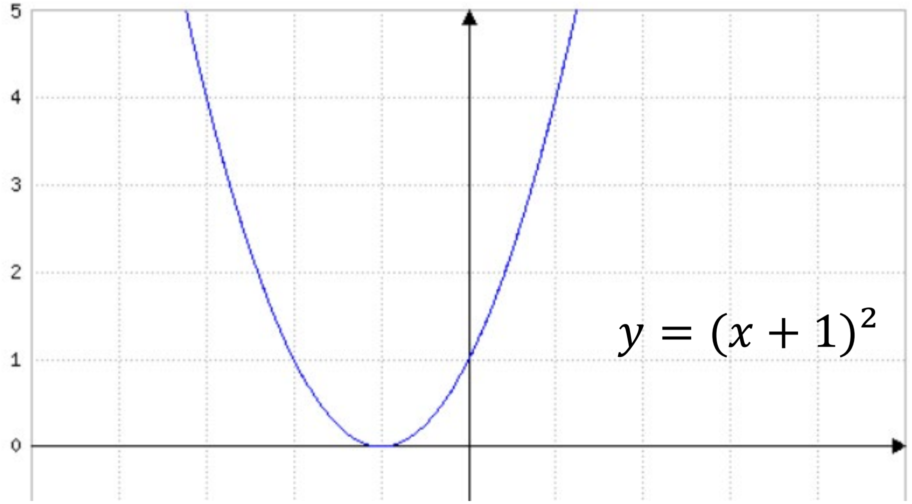


→ in **y-Richtung** verschoben





→ in **x-Richtung** verschoben



AB 4

Teil A Nr. 4 a-f

4) Bestimmen Sie für folgende Funktionen die Scheitelform und deren Scheitel.

a. $y = -x^2 - 2x - 1$
b. $y = x^2 - 6x + 8$
c. $y = -0{,}5x^2 - 2x - 1$
d. $y = x^2 - 4x + 9$
e. $y = -x^2 + 4x - 9$
f. $y = 2x^2 - 2x + 2$
g. $y = x^2 + 6x + 4$
h. $y = -3x^2 + 12x - 9$
i. $y = x^2 - 4x + 2$
j. $y = -x^2 + 8x - 9$
k. $y = 0{,}5x^2 - 4x + 5$
l. $y = 3x^2 - 42x + 138$

Umkehrfunktion

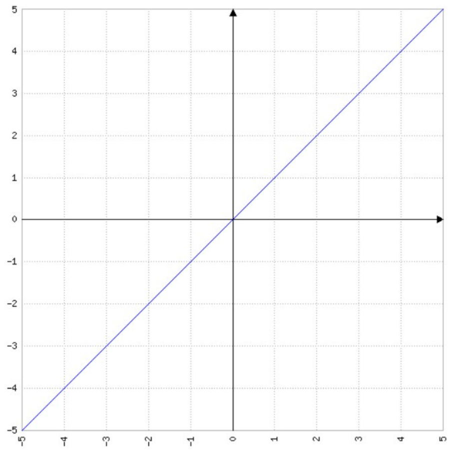
Hochschule
für Wirtschaft und Gesellschaft
Ludwigshafen

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longmapsto & 3 \\ 2 & \longmapsto & 2 \\ 3 & \longmapsto & 3 \\ 4 & \longmapsto & -1 \end{array}$$

Eine Funktion ist umkehrbar, wenn jedem y-Wert **nur ein x-Wert** zugeordnet ist.

Die Umkehrfunktion wird mit f^{-1} bezeichnet.

> Die Gleichung der Umkehrfunktion von f gewinnt man, indem man die Gleichung $y = f(x)$ nach x auflöst und die Bezeichnungen y und x vertauscht.



Die Graphen der Funktion $y = f(x)$ und ihrer Umkehrfunktion $y = f^{-1}(x)$ liegen **spiegelbildlich zur Geraden $y = x$**.

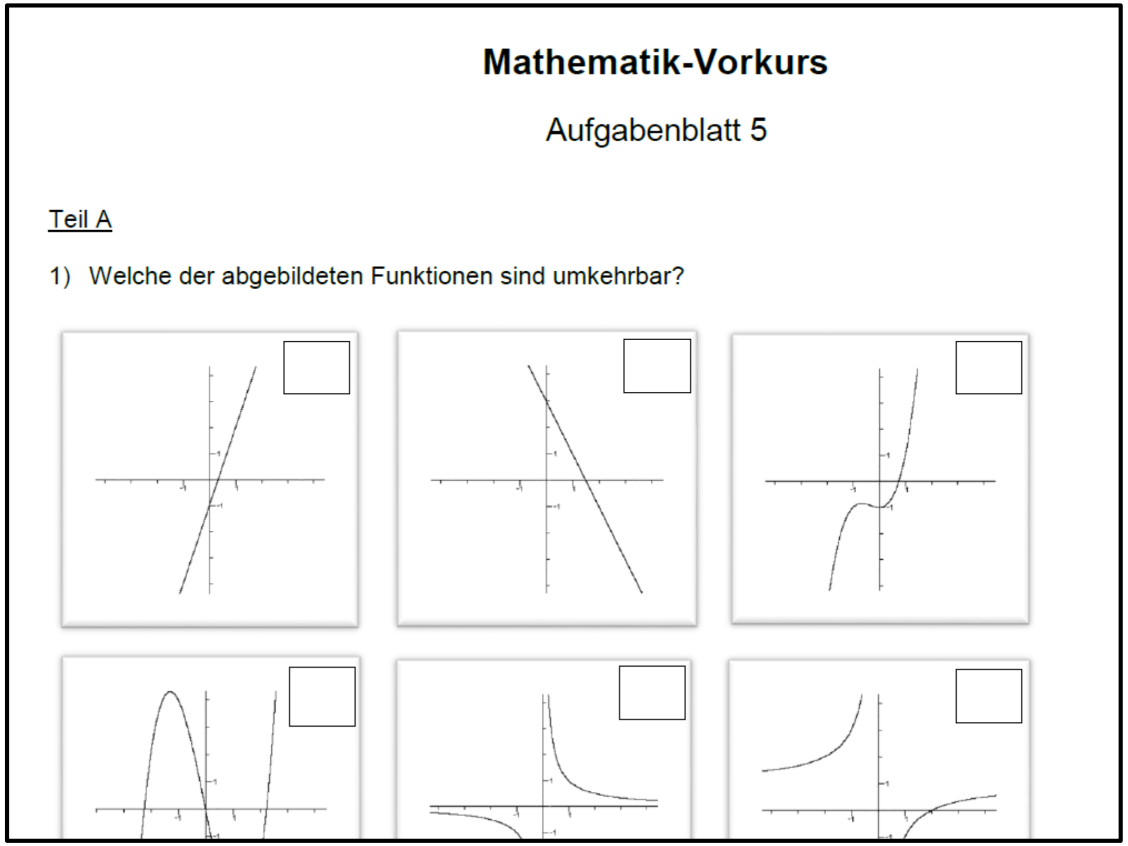
Übungsaufgaben

Hochschule
für Wirtschaft und Gesellschaft
Ludwigshafen

AB 5 Teil A

Nr. 1

Nr. 2 a-d



Mathematik-Vorkurs

Aufgabenblatt 5

Teil A

1) Welche der abgebildeten Funktionen sind umkehrbar?

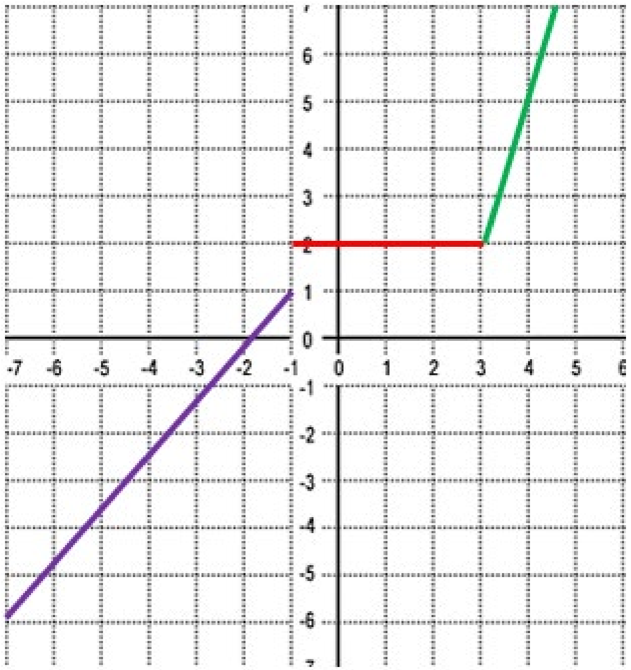
Stück-/ Abschnittsweise definierte Funktionen

Hochschule
für Wirtschaft und Gesellschaft
Ludwigshafen

Bisher waren die behandelten Funktionen (abgesehen von Definitionslücken) auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Funktionen können auch nur für ein bestimmtes Intervall definiert sein oder stück- bzw. abschnittsweise aus verschiedenen Teilfunktionen zusammengesetzt sein:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 \ \text{für}\ x < -1 \\ 2 \ \text{für}\ -1 \leq x < 3 \\ 3x - 7 \ \text{für}\ x \geq 3 \end{cases}$$



Übungsaufgaben

Zeichnen Sie folgende abschnittsweise definierte Funktion in ein Koordinatensystem ein:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{für } x < -1 \\ 1 & \text{für } x \geq -1 \end{cases}$$

Übungsaufgaben

Zeichnen Sie folgende abschnittsweise definierte Funktion in ein Koordinatensystem ein:

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{für } x < -2 \\ -2x & \text{für } -2 \le x < 0 \\ x & \text{für } 0 \le x < 3 \\ 3 & \text{für } x \ge 3 \end{cases}$$

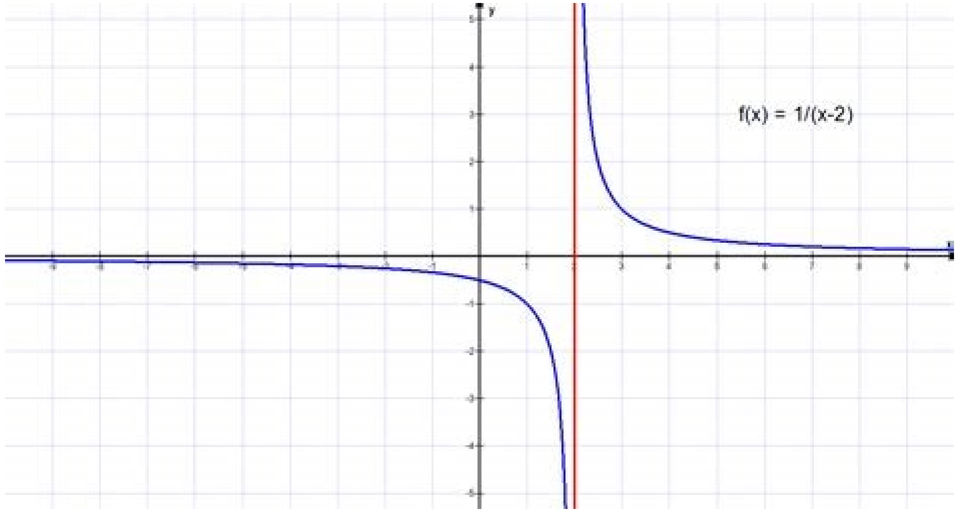
Grenzwert

Hochschule
für Wirtschaft und Gesellschaft
Ludwigshafen

Der Grenzwert einer Funktion an einer bestimmten Stelle bezeichnet denjenigen Wert, dem sich die Funktion in der Umgebung der betrachteten Stelle annähert.

Interessante Stellen sind:

- Verhalten Richtung ∞
- Verhalten Richtung $-\infty$
- Verhalten an Definitionslücken



→ Wertetabelle spiegelt Kurvenverlauf wider

→ Betrachtung durch Einsetzen naheliegender Werte für x

AB 5 Teil B

Nr. 1 a-h

Teil B

1) Ermitteln Sie die Grenzwerte der folgenden Funktionen für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

a. $f(x) = 2x - 2$

b. $f(x) = \frac{x}{3} + 4$

c. $f(x) = x^2 + 2x - 1$

d. $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

e. $f(x) = x^3 - 2x^2 - \frac{x}{2} - 1$

f. $f(x) = -x^3 - 2x^2 - \frac{x}{2} - 1$

g. $f(x) = x^{25}$

h. $f(x) = x^{26}$

i. $f(x) = \frac{1}{x}$

j. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

k. $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x}$

l. $f(x) = \frac{2x}{x^2 - x}$

m. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$

n. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x}$

o. $f(x) = \frac{x + 1}{x^2}$

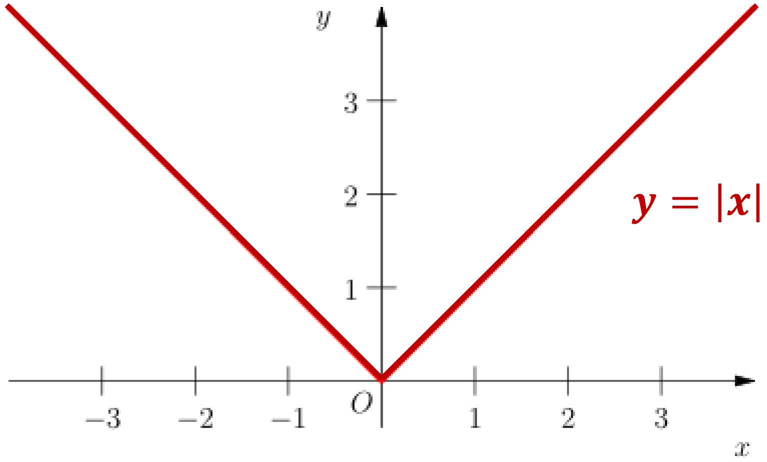
p. $f(x) = \frac{2x - 1}{4x + 1}$

Betrag

Der absolute Betrag einer reellen Zahl x ist definiert durch:

$$|\boldsymbol{x}| = \begin{cases} \boldsymbol{x}, & \boldsymbol{falls\ x \geq 0} \\ -\boldsymbol{x}, & \boldsymbol{falls\ x < 0} \end{cases}$$

Den absoluten Betrag einer reellen Zahl erhält man also durch das Weglassen des Vorzeichens. Auf der Zahlengerade bedeutet der Betrag den Abstand der gegebenen Zahl von Null.



Verlauf der Betragsfunktion
$\boldsymbol{y = |x|\ auf\ \mathbb{R}}$